

## Was ist Krümmung?

Im Flachland sind Maßstäbe in kühleren Regionen kürzer, in wärmeren Regionen dehnen sie sich aus. Dadurch ergibt sich Überraschendes, wenn man Durchmesser und Radien von Kreisen misst. Im Flachland mit der konstanten Temperatur, in dem alle Maßstäbe immer gleich groß sind, stehen Umfang und Durchmesser in einem konstanten Verhältnis. Man dividiert den Umfang durch den Durchmesser und erhält den Wert  $\pi$ , der rund 3,14 beträgt. Dividiert man im anderen Flachland den Umfang durch den Durchmesser, stellt man fest, dass der Wert, den man erhält, ein anderer ist. Weil die Maßstäbe in den wärmeren Regionen länger sind, ist das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser ein anderes, wodurch sich ein kleinerer Wert errechnet als  $\pi$ .

Dieses Phänomen kennen wir von der Kugeloberfläche, auf der wir ebenfalls Kreise zeichnen können. Der Durchmesser eines solchen Kreises ist länger als der Durchmesser eines Kreises in einer Ebene, obwohl beide denselben Umfang haben.

Ähnlich seltsame Phänomene zeigen sich auch bei anderen geometrischen Figuren. Füge ich im Flachland mit der konstanten Temperatur gleich lange gerade Strecken aneinander, die um jeweils  $90^\circ$  gedreht sind, komme ich wieder zum Ausgangspunkt zurück. Nicht so aber in jenem Flachland, in dem die Temperaturen unterschiedlich hoch sind und die Maßstäbe daher verschieden lang, auch dann, wenn wir uns bei jeder Richtungsänderung um genau  $90^\circ$  drehen. Dieser Effekt findet sich ebenfalls auf der Kugeloberfläche wieder.

Und auch beim Dreieck ergibt sich Sonderbares: durch die Krümmung ist die Winkelsumme nämlich größer als  $180^\circ$ .

Da die Kugeloberfläche gekrümmt ist, kann man folgern, dass aufgrund derselben Geometrie auch das Flachland mit den unterschiedlichen Temperaturen gekrümmt ist. Damit eine Geometrie einen gekrümmten Raum beschreibt, muss der Raum nicht irgendwohin ausgebeult sein.

Allein durch Vermessen von geometrischen Figuren können die Flachlandbewohner also feststellen, ob sie in einem gekrümmten oder in einem flachen Raum leben. Sie brauchen ihre Welt dazu nicht verlassen.